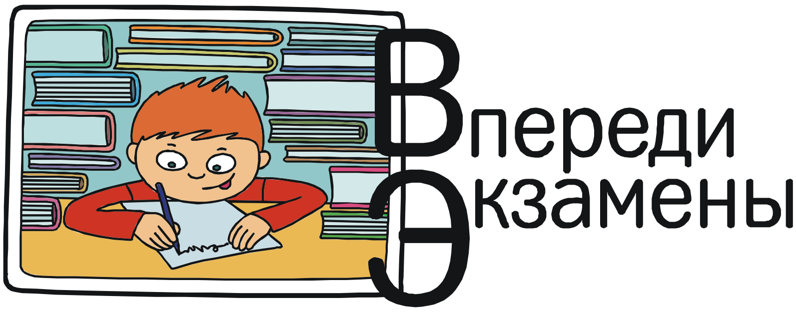


Богомолова Ольга Борисовна,
Усенков Дмитрий Юрьевич

ПОДПРОГРАММЫ И КОЛИЧЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ *K*: БЫСТРОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 21

Среди «ужасов», преследующих 11-классников в нынешних вариантах ЕГЭ по информатике, числится задача № 21.

Определить количество различных значений входной переменной k, при которых программа выдаёт тот же ответ, что и при входном значении k = 64. *Значение k* = 64 *также включается в подсчёт.*

```
var k, i : longint;
function f(n: longint) : longint;
  begin
    f := n * n
  end;
begin
  readln(k);
  i := 12;
  while (i>0) and (f(i) >= k) do
    i := i-1;
  writeln(i)
end.
```

Решение подобных задач рассмотрено более подробно, например, в книге: *Богомолова О.Б.* Информатика: ЕГЭ за 30 дней: Экспресс-репетитор. М.: АСТ, Астрель, 2014. Но школьникам на ЕГЭ (особенно теперь) крайне важна скорость решения задач, поскольку задания становятся всё сложнее, а время ограничено. Ниже описан быстрый способ решения задач № 21, отработанный авторами. Он пригоден для большинства задач такого типа, даже после их усложнения в последние годы.

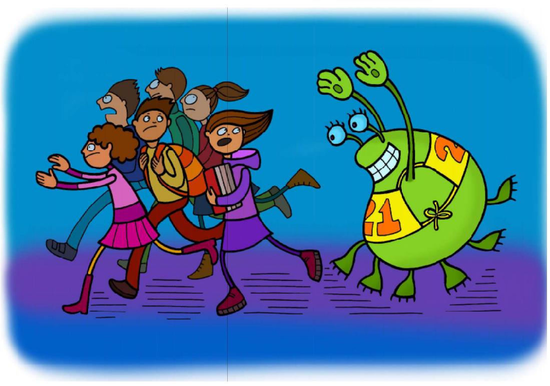
Формализация задачи

В условии нам важно:
1) запись подпрограммы (функции),
2) условие в заголовке цикла, связывающее `f(i)` и `k`,
3) операция изменения `i` в теле цикла,
4) «опорное» значение `k`, указанное в тексте условия.

Решение

Шаг 1. *Когда цикл будет остановлен? Тогда, когда цикловое условие будет нарушено. Поэтому записываем первое неравенство, противоположное имеющемуся в условии цикла: для этого нужно заменить знак «больше» на «меньше» (или наоборот) и сделать неравенство строгим, если в цикле оно было нестрогое, или наоборот.*

В нашем случае из условия `f (i) >= k` получаем противоположное ему условие `f(i) < k`.



Шаг 2. *Когда цикл еще выполнялся в последний раз? Когда его условие еще оставалось истинно на предыдущем проходе цикла. В цикле из i каждый раз вычитается единица, значит, на предыдущем проходе цикла i было на единицу больше текущего значения этой переменной и вычислялось значение функции $f(i+1)$. Поэтому его мы и записываем во втором неравенстве.*

В нашем случае переписываем условие цикла в виде: **`f (i+1) >= k`**.

Шаг 3. *В обоих этих неравенствах имеется одинаковый член – k. Поэтому можно записать оба неравенства в виде одного двойного неравенства, в котором k записано только один раз. Для этого одно из ранее записанных неравенств нужно «развернуть», чтобы k было в нем слева; при этом знак «больше» меняется на «меньше» (или наоборот), но строгость/нестрогость сохраняется.*

В нашем случае нужно «развернуть» второе неравенство: **`f(i+1) >= k`** → **`k <= f(i+1)`**.

Тогда записываем следующее двойное неравенство:

$$\begin{cases} \mathtt{f(i) < k} \\ \mathtt{k <= f(i+1)} \end{cases} \rightarrow \mathtt{f(i) < k <= f(i+1)}$$

Шаг 4. *Подставляем в это двойное неравенство значение k из условия, а вместо $f(i)$ и $f(i+1)$ переписываем саму запись функции из текста программы. При этом «не смущаемся» тем, что переменная там будет уже другая – n, а не i.*

В нашем случае $k = 64$, вместо $f(i)$ записывается **`n*n`**, а вместо $f(i+1)$ – **`(n+1)*(n+1)`**.

Получаем запись: **`n`**^{2} **`< 64 <= (n+1)`**^{2}.

Шаг 5. *Ищем такое значение n, чтобы это неравенство было истинным. Это можно сделать подбором, начиная с единицы, так как числа в таких задачах используются небольшие.*

В нашем случае, очевидно, $n = 7$, так как $7^2 = 49$, что меньше 64, а $(7+1)^2 = 8^2 = 64$, что тоже допустимо (в правой части неравенства условие нестрогое и допускает равенство).

Шаг 6. *Теперь записываем наше двойное неравенство уже с переменной k в середине, а справа и слева записываем значения, вычисленные при найденном значении n.*

В нашем случае получаем запись: **`7`**^{2} **`< k <= (7+1)`**^{2} → **`49 < k <= 64`**.

Шаг 7. *Итак, мы определили числовой интервал, в котором записано значение k. Ищем количество натуральных чисел в этом интервале. Поскольку интервал открыт только с одной стороны (одно конечное значение входит в него – соответствующее условие нестрогое, а другое конечное значение не входит – условие строгое), количество входящих в него чисел равно разности большего граничного значения и меньшего.*

В нашем случае получаем интервал (49, 64], а количество входящих в него натуральных значений k равно $64 – 49 = 15$. Это и есть ответ.

Ответ: 15.

В других заданиях может потребоваться искать сумму или произведение значений k либо указать минимальное/максимальное значение k из найденного интервала. Сделать это, очевидно, не так сложно, когда интервал уже определен.

Для закрепления попробуем по тому же алгоритму решить еще одну задачу.

Определить количество различных значений входной переменной k, при которых программа выдаёт тот же ответ, что и при входном значении $k = 51$. Значение $k = 51$ также включается в подсчёт.

```
var k, i : longint;
function f(n: longint):longint;
  begin
    f := 3*n*n+1
  end;
begin
  readln(k);
  i := 0;
  while (f(i)<k) do
    i := i+1;
  writeln(i)
end.
```

Формализация задачи

Функция **`f := 3*n*n+1`**, $k = 51$, условие цикла – **`f(i) < k`**, изменение переменной в цикле – **`i := i+1`**.

Решение

Шаг 1. Противоположное условие цикла: **f(i) >= k**.

Шаг 2. Условие цикла для предыдущего значения переменной цикла: **f(i-1) < k**.

Шаг 3. Двойное неравенство:

$$\begin{cases} \texttt{f(i) >= k} \\ \texttt{f(i-1) < k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \texttt{k <= f(i)} \\ \texttt{f(i-1) < k} \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow$ **f(i-1) < k <= f(i)**

Шаг 4. Записываем в неравенство соответствующие значения:

3(n-1)^2+1 < 51 <= 3n^2+1.

Шаг 5. Подбором определяем, что $n = 5$, так как **3*4^2+1 < 51 <= 3*5^2+1** $\rightarrow$ **49 < 51 <= 76**.

Шаг 6. Сразу записываем это неравенство с переменной *k* в середине: **49 < k <= 76**.

Шаг 7. Получаем числовой интервал: (49, 76], тогда количество значений равно 76–49 = 27.

Ответ: 27.

Попробуем по тому же алгоритму решить новую, усложненную задачу № 21[1].

Напишите в ответе количество различных значений входной переменной k, при которых программа выдаёт тот же ответ, что и при входном значении k = 18. Значение k = 18 также включается в подсчёт различных значений k.

```
var k, i : longint;
function F(x: longint) : longint;
begin
  if x < 2 then
       F:= 1
  else F:=3* F(x-1) - F(x-2)
end;
begin
  i := 11;
  readln(k);
  while (i> 0) and (F(i) > k) do
    i:=i-1;
  writeln(i)
end.
```

Решение

Здесь усложнена функция $f(i)$ – она сделана рекурсивной. Это несколько увеличит время на решение задачи.

Формализация задачи

Функция:

```
if x < 2 then
       F:= 1
else F:=3* F(x-1) - F(x-2),
```

$k = 18$, условие цикла – **F(i) > k**, изменение переменной в цикле – **i:=i-1**.

Шаг 1. Противоположное условие цикла: **f(i) <= k**.

Шаг 2. Условие цикла для предыдущего значения переменной цикла: **f(i+1) > k**.

Шаг 3. Двойное неравенство:

$$\begin{cases} \texttt{f(i) <= k} \\ \texttt{f(i+1) > k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \texttt{f(i) <= k} \\ \texttt{k < f(i+1)} \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow$ **f(i) <= k < f(i+1)**

Шаг 4. Записываем в неравенство соответствующее значение *k*:

f(i) <= 18 < f(i+1).

Шаг 5. Значения $f(i)$ и $f(i+1)$ нужно подбирать рекурсивно, начиная со значения 0, при этом на каждом последующем шаге мы уже знаем и берем из предыдущих строк таблицы значения $f(i)$ для предыдущих значений i (см. табл. 1).

Табл. 1

i (оно же *x*)	Условие *x* < 2	*f*(*x*) (оно же *f* (*i*))
0	да	1
1	да	1
2	нет	`3* F(x-1) - F(x-2) =` `3* F(1) - F(0) = 3*1 - 1 = 2`
3	нет	`3* F(x-1) - F(x-2) =` `3* F(2) - F(1) = 3*2 - 1 = 5`
4	нет	`3* F(x-1) - F(x-2) =` `3* F(3) - F(2) = 3*5 - 2 = 13`
5	нет	`3* F(x-1) - F(x-2) =` `3* F(4) - F(3) = 3*13 - 5 = 34`

[1] Сайт http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm.

Видим, что в качестве $f(i)$ нам годится значение 13 (при $i = 4$), а значение при $(i + 1)$ – это 34 (для $i = 5$). Получаем: **`13 <= 18 < 34`**.

Шаг 6. Сразу записываем это неравенство с переменной k в середине: **`13 < k <= 34`**.

Шаг 7. Получаем числовой интервал: (13, 34], тогда количество значений равно 34 – 13 = 21.

Ответ: 21.

А теперь «на закуску» попробуем решить еще одну усложненную задачу № 21[2].

Напишите в ответе наименьшее значение входной переменной k, при котором программа выдаёт тот же ответ, что и при входном значении k = 20.

```
var
  k, i : longint;
function f(n: longint): longint;
begin
  f := n * n * n;
end;
function g(n: longint): longint;
begin
  g := 3*n + 3;
end;
begin
  readln(k);
  i := 1;
  while f(i) < g(k) do
    i := i+1;
  writeln(i)
end.
```

Решение

Усложнение здесь – в том, что в условии цикла значение «основной» функции $f(i)$ сравнивается не с k, а со значением функции $g(k)$. Но поскольку введенное значение k в процессе работы программы не изменяется, можно лишь незначительно модифицировать вышеописанный алгоритм решения: в неравенствах записывать не k, а значение $g(k)$, а позже пересчитать его «обратно» в значения k.

Формализация задачи

Функция **`f := n * n * n`**, $k = 20$, **`g(k) = 3*k + 3`**, условие цикла – **`f(i) < g(k)`**, изменение переменной в цикле – **`i := i+1`**.

Шаг 1. Противоположное условие цикла: **`f(i) >= g(k)`**.

Шаг 2. Условие цикла для предыдущего значения переменной цикла: **`f(i–1) < g(k)`**.

Шаг 3. Двойное неравенство (соединяется по $g(k)$):

$$\begin{cases} \mathtt{f(i) >= g(k)} \\ \mathtt{f(i-1) < g(k)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathtt{g(k) <= f(i)} \\ \mathtt{f(i-1) < g(k)} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathtt{f(i-1) < g(k) <= f(i)}$$

Шаг 4. Записываем в неравенство соответствующие значения: $\mathtt{(n-1)^3 < 3*20+3 <= n^3}$ или $\mathtt{(n-1)^3 < 63 <= n^3}$.

Шаг 5. Подбором определяем, что $n = 4$, так как $\mathbf{(4–1)^3 < 63 <= 4^3 \rightarrow 27 < 63 <= 64}$.

Шаг 6. Записываем это неравенство с $g(k)$ в середине: **`27 < g(k) <= 64`**. Переписываем его для k: **`27 < 3*k+3 <= 64`**.

Шаг 7. Решая левую часть неравенства, получаем: **`27 < 3*k+3`** → **`24 < 3*k`** → **`8 < k`**.

Решая правую часть неравенства, получаем: **`3*k+3 <= 64`** → **`3*k <= 61`** → $\mathtt{k <= 20^1/_3}$.

Тогда числовой интервал для натуральных значений k: (8, 20] (дробную часть отбрасываем).

Из этого интервала выбираем наименьшее возможное значение k. Так как левая («наименьшая») граница интервала в него не входит, ответом является следующее по величине натуральное число 9.

Ответ: 9.

---

[2] Образовательный портал «Решу ЕГЭ» https://inf-ege.sdamgia.ru/.

Богомолова Ольга Борисовна,
доктор педагогических наук,
учитель информатики
ГБОУ СОШ № 1360 г. Москва,

Усенков Дмитрий Юрьевич,
Московский государственный
институт индустрии туризма
имени Ю.А. Сенкевича, г. Москва.